RÉVISIONS MATHÉMATIQUES

Voici un programme de révisions pour aborder l'ECG avec les bases indispensables en mathématiques.
Dans l'idéal, je vous conseille :

— de faire chaque semaine quelques petits calculs pour éviter un « vide » mathématique de 2 mois

— de reprendre fin août des calculs dans chaque partie de cette fiche.

Ces exercices ne présentent pas de difficulté technique particulière, mais vous permettront d'aborder la prépa sans avoir besoin de rattraper les méthodes oubliées depuis le lycée.
Ces exercices ne seront pas corrigés en classe, il s'agit d'un travail autonome. N'hésitez pas à vérifier vos réponses au fur et à mesure à l'aide de votre calculatrice. Si vous souhaitez un corrigé détaillé, vous pouvez nous le demander par mail :
Camille Francini (mathématiques approfondies) - camille.francini@ac-amiens.fr
Valérie Goyheneche (mathématiques appliquées) - valerie.goyheneche@ac-amiens.fr

Bonnes vacances !

1 Fractions

Propriété 1

Soient a, b, c, d des réels tels que $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.

- **Simplifications basiques :** $\frac{0}{a} = 0 \qquad \frac{a}{1} = a \qquad \frac{a}{-1} = -a \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$
- **Addition et soustraction** : on additionne ou soustrait les fractions uniquement si on les a mises au même dénominateur.
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$
- **Produit** : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$
- **Quotient** : Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.
$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exercice 2 : Simplifier les fractions suivantes.

1. $A = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{4}\right)$
2. $B = \dfrac{\frac{3}{4} - 2}{\frac{-4}{5} - 1}$
3. $C = \dfrac{3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$
4. $D = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{7}{8} - \left(\frac{2}{4} - 1\right)\right)$
5. $E = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{24}\right) \times \frac{12}{49}$
6. $F = \dfrac{x+5}{1 + \frac{2}{x+3}}$
7. $G = \dfrac{\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x}{5x+1}}{\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+5}{2x-3}}$

2 Calcul avec des racines

Définition 3

La **racine carrée** d'un nombre réel positif est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a.
On a donc $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Propriété 4

1. Pour tout nombre réel a, on a $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ pour } b \neq 0.$$

***Remarque* 5 :** En règle générale, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, $5 = \sqrt{25} = \sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

Définition 6 (Expression conjuguée)

Soient a et b deux réels positifs tels que $a \neq b$. Alors l'expression conjugué de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. On a alors :

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$$

En particulier, on utilisera l'expression conjugué pour écrire les quotients différemment.

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

***Remarque* 7 :** L'utilisation de la forme conjuguée sera notamment utile pour lever des indéterminations dans le cadre du calcul de limites.

Exercice 8 : Simplifier :

1. $A = \sqrt{8} - \sqrt{75} + 4\sqrt{12}$
2. $B = \dfrac{\sqrt{\frac{450}{25}} \times \sqrt{1}}{45}$
3. $C = \dfrac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$
4. $D = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2}$

5. $E = \left(\sqrt{3-\sqrt{4}} + \sqrt{3+\sqrt{4}}\right)^2$.

3 Calcul avec des puissances

Définition 9

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n facteurs}}$.
- Si de plus, $a \neq 0$, on définit $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Par convention, $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$.

Propriété 10 (Règles de calcul)

Soient a et b deux nombres réels non nuls et m et n deux entiers relatifs.

- Avec des puissances différentes,

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$$

- Avec des puissances identiques,

$$a^m \times b^m = (a\times b)^m \qquad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

***Remarque* 11 :** En particulier, $2\times 2^n = 2^1 \times 2^n = 2^{n+1}$. Par contre $2\times 2^n = 4^n$ est FAUX.
***Remarque* 12 :** Il n'a pas de règles avec l'addition ou la soustraction de puissances.
Exercice 13 : Calculer les expressions suivantes :

1. $A = 2^3 \times 5^5 \times 2^{-7}$
2. $B = \dfrac{2^3 \times 5^3}{7^3}$
3. $C = \dfrac{7^5}{7^{-3}}$
4. $D = \left(\dfrac{3^{-2}}{3}\right)^4$
5. $E = 5^4 \times 25^{-7} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$
6. $F = \dfrac{x^5 \times x^{-3}}{x^2}$

Exercice 14 : Même consigne.

1. $A = \dfrac{18\times 10^4 \times 27 \times 10^3}{1200 \times (10^2)^2}$
2. $B = (-3)^3 \times 2 + 3^2 \times 2^4 - 5 \times 2^3$
3. $C = 3 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - (2^3 \times 2)$
4. $D = \dfrac{(3\times 10 - 2)^3 \times (5^2 \times 10^4)^2}{6 \times 10^3 \times 25 \times 10^7}$
5. $E = \dfrac{25 \times (10^2)^{-5} \times 121}{11 \times 75 \times 10^{-9}}$
6. $F = \dfrac{a^4 b^5 (ab)^{-2}}{a^{-4} b^7}$

4 Exponentielle et logarithme népérien

On rappelle que $\ln(x)$ est défini si $x > 0$.
Par contre $\exp(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on a alors $\exp(x) > 0$.

Propriété 15 (Règles de calcul)

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier naturel. Alors

$$\ln(ab) = \ln(ab) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$

Soit a et b deux réels. Alors

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \quad \text{on note aussi } e^{ab+} = e^a + e^b$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

À retenir : $\ln(1) = 0$ et $\exp(0) = 1$

Exercice 16 : Simplifier

1. $A = \ln(9) - \ln(8) - \ln(6) - \ln(15) + \ln(5)$
2. $B = \ln\left(\dfrac{2x+1}{3x}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{4x+2}\right)$
3. $C = \dfrac{e^{3x+2}e^{-2x}}{e^{9x+6}e^{-16x}}$

5 Factorisation

Définition 17

- Développer une expression, c'est la transformer en une somme ou en une différence.
- Factoriser une expression, c'est la transformer en un produit ou en un quotient.

Propriété 18

- **Double distributivité** : Soient a, b, c et d des réels.

$$(a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d.$$

- **Factorisation** : Soient a, b et c des réels.

$$a\times b + c\times b = (a+c)\times b.$$

- **Identités remarquables** : Soient a et b des réels.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2, \quad a^2 - b^2 = (a+b)\times(a-b).$$

Exercice 19 : Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = (x^2 + 2x + 1)(x + 3)$
2. $B = (3x + 3)^2 - (-6 + x)^2$
3. $C = \left(6x - \frac{1}{6}\right)^2$

Exercice 20 : Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = 3(x - 1)^2 - (7x + 1)(x - 1)$
2. $B = (x + 2)^2 - 49(5 - x)^2$
3. $C = (x + 2)(6x - 3) - (1 - 2x)^2$

6 Équation de degré 1

Théorème 21 (Équation du premier degré)

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. L'équation $a\ x\ +\ b = 0$ admet une unique solution réelle qui vaut $x = -\frac{b}{a}$.

Exercice 22 : Résoudre les équations suivantes :

1. $2x + 1 = 0$,
2. $-2x + 2 = 4$,
3. $2\ln x + 1 = 0$ (Trouver d'abord la valeur de $\ln x$ puis celle de x.)

7 Équations de degré 2

Théorème 23 (Équation de degré 2)

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 2 solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a la factorisation :
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a la factorisation :
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$
- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.

Exercice 24 : Déterminer les solutions de

1. $x^2 + x - 1 = 0$,
2. $2x^2 + x + 1 = 0$,
3. $x^2 + 2x + 1 = 0$.

8 Inéquation de degré 1

Proposition 25 (Signe de $a\,x + b$)

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. L'étude du signe de $a\,x + b$ permet de résoudre les inéquations $a\,x + b \leq 0$ et $a\,x + b \geq 0$ (ainsi que les inéquations strictes).

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$		signe de -a	0	signe de a	

Méthode 26 (Résolution d'une inéquation de degré 1)

On veut résoudre l'équation $(E)\ :\ 3x + 1 \leq 0$.

1. On cherche les solutions de l'inéquation (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $3x + 1 \leq 0 \iff 3x \leq -1 \iff x \leq -\dfrac{1}{3}$.
3. Donc $S = \left]-\infty\,;\, -\dfrac{1}{3}\right]$

Exercice 27 : Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x + 1 \leq 0$,
2. $-2x + 2 > 4$.

9 Inéquation de degré 2

Proposition 28 (Signe d'un trinôme du second degré)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors en notant x_1 et x_2 les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, alors en notant x_0 la racine du polynôme $ax^2 + bx + c$,

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, alors

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	

Méthode 29 (Résolution d'une inéquation de degré 2)

On veut résoudre l'équation $(E)\ :\ 2x^2 + x - 6 > 0$.

1. On cherche les solutions de l'inéquation (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Le discriminant vaut $\Delta = 49 > 0$. Donc l'équation admet 2 racines -2 et $\frac{3}{2}$. Donc on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Ainsi, $S = \left]-\infty\,;\,-2\right[\bigcup \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Exercice 30 : Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 + x - 1 \leq 0$,
2. $2x^2 + x + 1 > 0$,
3. $x^2 + 2x + 1 \geq 0$.

10 Dérivation

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$f(x) = \mathrm{C}^{\text{te}}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Règles de calcul à connaître :

Forme de la fonction	Formule de dérivation	Condition
$u + v$	$u' + v'$	aucune
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	aucune
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	aucune
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Exercice 31 : Dériver les fonctions définies par les formules suivantes.

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$
2. $f(x) = e^x + \ln(x) + \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-5}$
4. $f(x) = e^{3x+2}$
5. $f(x) = \ln(x)(-2x+5)$
6. $f(x) = e^{2x}(4x^2 - 5x)$
7. $f(x) = \sqrt{x^2+3}$
8. $f(x) = \ln(5x+7)$
9. $f(x) = \dfrac{e^{2x}+4}{3(\ln x + 7x)}$